矩阵 1

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 基本技巧

1.1 基础知识.

1.1.1 对于标准单位向量 $\varepsilon_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{(n\times 1)} \to$ 第 j 行, 有如下结论.

(1) $\varepsilon_i'\varepsilon_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

(2) $A\varepsilon_j = \beta_j$(A 的第 j 列)

(3) $\varepsilon_i' A = \alpha_i$(A 的第 i 行)

(4) $\varepsilon_i' A \varepsilon_j = a_{ij}$

1.1.2 基本矩阵 E_{ij}, 只有 (i, j) 位置为 1, 其余位置为 0 的矩阵. 有如下性质.

(1) 将矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 拆分

$$A = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

(2) 左行

$E_{ij}A$ 将 A 的第 j 行移到第 i 行, 其余位置为零.

助记: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$, 将第 1 行移到第 2 行.

(3) 右列

AE_{ij} 将 A 的第 i 列移到第 j 列, 其余位置为零.

助记: $\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$, 将第 2 列移到第 1 列.

(4) 特殊地

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} = \begin{cases} E_{il}, j = k \\ 0, \quad j \neq k \end{cases}$$

$$E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}.$$

1.1.3 对称矩阵 $A^{\mathrm{T}} = A$

若 A, B 都是对称矩阵, 则 AB 也是对称矩阵.

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = BA.$$

1.2 基本例题

例题 1 证明: $tr(AB)=tr(BA)$

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B_{n\times m}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

证: 因为

$$\begin{aligned} tr(AB) &= a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1} \\ &+ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\cdots+a_{2n}b_{n2} \\ &\qquad\vdots \\ &+ a_{m1}b_{1m}+a_{m2}b_{2m}+\cdots+a_{mn}b_{nm}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tr(BA) &= b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+\cdots+b_{1m}a_{m1} \\ &+ b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+\cdots+b_{2m}a_{m2} \\ &\qquad\vdots \\ &+ b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+\cdots+b_{nm}a_{mn}. \end{aligned}$$

所以, $tr(AB)=tr(BA)$.

注: 迹运算满足交换律, 不同于矩阵运算.

延伸: 对于实方阵, $tr\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=0\Rightarrow A=0$, 留给你自己证吧!

例题 2 求线性递推数列 $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$ 的通项公式.

解:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}\Rightarrow x_n=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

问题的关键在于计算 $A^n=\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$, 将矩阵 A 对角化, 即可计算.(学习了相似对角化, 再回来具体计算)

自己计算 Fibonacci 数列的通项公式.

例题 3 矩阵可交换问题

求所有与 n 阶矩阵可交换的矩阵

解: 记该矩阵为 A, 设 $AB=BA$

(1) 设 $B=E_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$(基本矩阵)

$$AE_{ii}=\begin{bmatrix} & a_{1i} & \\ & \vdots & \\ & a_{ii} & \\ & \vdots & \\ & a_{ni} & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}=E_{ii}A$$

所以 $a_{ij}=a_{ji}=0, j=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$.

(2) 由 (1) 设

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

所以

$$AB=\begin{bmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n}\\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n}\\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{bmatrix}=BA$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$, 即 $A=\lambda E$ 为标量矩阵.

注: 矩阵可交换问题是一个非常重要的问题, 考研中经常容易出现, 但是作为基础每日一题, 这里都是简单的.

矩阵 2

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 左行右列 & 几何意义

2.1 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, 分别计算 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$

解:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right) -> \text{分配律}\\ &=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{BA}&=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} -> \text{分配律}\\ &=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

首先看结果, $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$, 即矩阵乘法不满足交换律, 我认为这并不是说明矩阵乘法不满足交换律的最好例子, 因为有的矩阵交换后, 根本不能乘! 你能给出例子吗?

然后看计算过程, 矩阵乘法虽然不满足交换律, 但是线性运算都可以进行, 比如满足分配律, 把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 拆分为单位阵 $\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$和矩阵$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 然后, 依次相乘再相加.

实际上, 上面所有的计算我都没有用到矩阵的乘法规则: “一行乘一列”, 都是 “看” 出来的. 因为, 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 很特殊, 首先我们需要记住左乘行变换, 右乘列变换, 也就是说:

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 右侧乘上矩阵 $\boldsymbol{C}$ 就是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行 “某种列变换”, 这个 “某种列变换” 是指: 由单位阵经列变换化为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列变换. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行同样的列变换, 就矩阵乘法就计算完毕了. 单位阵交换两列化为 $\boldsymbol{C}$, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 交换两列就得到计算结果了.

对于 “左乘行变换” 是类似的. 对单位阵交换两行得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 那么, 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 交换两行就得到计算结果了.

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

上述方法叙述起来有些繁琐, 但是熟练掌握后, 就真是不能再方便了!

注: 以上多次提到了 “变换” 一词, 这正是你有可能不太熟悉的又十分重要的 “线性变换”, 无论如何, 请先记住: “线性变换是思想, 矩阵是工具.” 变换是容易想象的, 但是不好计算. 矩阵是容

易计算的, 但是那一堆数的意义又是不好解释的. 通过之后的学习, 相信你会加深对这句话的理解!

2.2 计算矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^{2019}$

解:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2018\\0 & 1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 2018\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2018\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2019\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

这道题, 就是将第 2 行加到第 1 行, 加 2018 就轻松得到结果了.(也可以用右乘列变换解释)

2.3 计算矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{bmatrix}^{3}$

解: 用 "变换" 的思想, 依次将第 2 行移到第 1 行, 第 3 行移到第 2 行, 得到

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{bmatrix}$$

再次将第 2 行移到第 1 行, 第 3 行移到第 2 行, 得到结果

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{bmatrix}$$

2.4 计算矩阵 $\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{2019}$

解: 旋转矩阵应该听说过吧, 没有的罚站 3 秒钟!

一次方的旋转矩阵可以把单位阵 "旋转" 了 α 度:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

两次方的旋转矩阵可以把单位阵 "旋转" 了 α 度后, 又旋转了 α 度, 也就是旋转了 2α 度:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}.$$

依次类推 $\cdots$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{2019} = \begin{bmatrix} \cos(2019\alpha) & -\sin(2019\alpha) \\ \sin(2019\alpha) & \cos(2019\alpha) \end{bmatrix}.$$

矩阵 3

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me
微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 代数运算 & 分块运算

3.1 代数运算

例题 1 设 $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$, 求 AB.

已知 A,B 都是旋转矩阵, 利用矩阵 1 中的几何意义, 可以很轻松的得到

$$AB=BA=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}.$$

现在, 通过矩阵的代数运算解这道题:

解:

$$A=\cos\alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\sin\alpha\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix} B=\cos\beta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\sin\beta\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

记

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

则 E 是单位阵, $J^2=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-E$. 计算

$$\begin{aligned}
AB &= [(\cos\alpha)E+(\sin\alpha)J][(\cos\beta)E+(\sin\beta)J]\\
&= (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)E+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)J\\
&= \cos(\alpha+\beta)I+\sin(\alpha+\beta)J\\
&= \begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

注: 对于这道题目, 显然, 几何意义解题更快, 但是, 通过这道题目我们要知道: 矩阵是我们的主要研究对象, 它跟实数一样可以进行代数运算!(**数分里的 Taylor 展开可以拿过来用了**)

例题 2 求解矩阵方程 $AX=E, A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{bmatrix}$, E 代表单位阵.

解: $A=E+N=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}$, 根据 Taylor 展开

$$X=A^{-1}=(E+N)^{-1}=E-N+N^2-N^3+\cdots. \tag{1}$$

(1) 式右端由于矩阵 N 的特殊性 $(N^i=0, i\geqslant 3)$, 变为了有限项, 所以

$$X=E-N+N^2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ & 1 & -1\\ & & 1\end{bmatrix}.$$

注: 矩阵 N 的特殊性, 是解决这道题目的关键, 由于这种特殊性, 矩阵 N 属于幂零矩阵, 一类很重要的矩阵!

3.2 分块运算

分块运算也许是我们大一学习高等代数时, 最不起眼的知识. 但是, 对于考研的学生来说, 不知道分块运算, 还考研? 对矩阵合理分块, 可以极大简化运算

例题 3 $B=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 是 n 阶对角形矩阵. $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 是 n 阶方阵, 求 BA 与 AB.

解: 首先, 将矩阵 A 写成行向量的形式, $A=\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{bmatrix}$. A_i 表示 A 的第 i 行. 则

$$BA=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1A_1\\ \vdots\\ \lambda_nA_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_1a_{12} & \cdots & \lambda_1a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_na_{n1} & \lambda_na_{n2} & \cdots & \lambda_na_{nn}\end{bmatrix}.$$

也就是将 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 分别乘到 A 的各行;

然后, 将矩阵 A 写成列向量的形式,$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}$. α_j 表示 A 的第 j 列. 则

$$AB=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\alpha_1 & \cdots & \lambda_n\alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1a_{11} & \lambda_2a_{12} & \cdots & \lambda_na_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1a_{n1} & \lambda_2a_{n2} & \cdots & \lambda_na_{nn}\end{bmatrix}$$

也就是将 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 分别乘到 A 的各列.

注: 以上, 用到了 "矩阵 1" 中左乘行变换, 右乘列变换法则 (当年, 我就是通过这道例题记住这句话的).

著名顶顶的 "打洞原理" 也是属于分块运算的 "重要成果", 逆矩阵明天再说.

矩阵 4

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 逆矩阵

4.1 预备知识

我们已经知道矩阵可以做加法, 乘法, 甚至是减法 (加法的逆运算), 但没有定义矩阵的除法. 在实数域中, 若

$$ab = ba = 1, a, b \in \mathbb{R}$$

就称 a, b 互逆. 相似的, 对于 $A, B \in R^n$, 若

$$AB = BA = E$$

则称 $B(A)$ 是 $A(B)$ 的逆矩阵.

当然, 并不是所有的矩阵都有逆矩阵. A 可逆的充要条件是:

$$\text{方阵}A\text{可逆} \Leftrightarrow |A| \neq 0. \tag{1}$$

当你知道了伴随矩阵 A^* 的概念, 就应该牢记 (2) 式

$$A^*A = AA^* = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = |A|\,E. \tag{2}$$

当 $|A| \neq 0$ 时,

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

值得注意的是: 即使 $|A| = 0$ 时, (2) 式依然成立.((2) 式的证明参照课本) (2) 式非常重要! 非常重要! 非常重要! 今后三天, 每天默写三遍!

4.2 例题

例题 1 设 $S \in F^{m\times n}, A \in F^{m\times m}, B \in F^{n\times n}$, 且 A, B.

(1) 求证: $\begin{bmatrix} E_m & S \\ & E_n \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} E_n & \\ S & E_m \end{bmatrix}$ 可逆.

(2) 求证: $\begin{bmatrix} A & S \\ & B \end{bmatrix}$ 可逆.

证: 结合分块矩阵性质

(1) 因为,

$$\begin{bmatrix} E_m & S \\ & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -S \\ & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & -S \\ & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & S \\ & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & \\ & E_n \end{bmatrix}=E$$

所以,

$$\begin{bmatrix} E_m & S \\ & E_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} E_m & -S \\ & E_n \end{bmatrix}$$

类似地,

$$\begin{bmatrix} E_n & \\ S & E_m \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} E_n & \\ -S & E_m \end{bmatrix}$$

(2) 因为,

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & S \\ & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_m & A^{-1}S \\ & E_n \end{bmatrix}$$

所以,

$$\begin{bmatrix} A & S \\ & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} E_m & A^{-1}S \\ & E_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} A & S \\ & B \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} E_m & A^{-1}S \\ & E_n \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \text{根据问题 (1)} \\ &= \begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}S \\ & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}SB^{-1} \\ & B^{-1} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

例题 2 快速求逆矩阵的方法

设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 求 X, Y 使 $AX=B, YA=B$.

思考: 对于这道题目, 一个直观的方法就是利用式 (2) 求 A^{-1}, 然后进行一次矩阵乘法. 然而下面的方法更值得借鉴.

解: 首先,

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

然后,

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 13 & -22 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{bmatrix} 13 & -22 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

用到的方法:

$$\begin{bmatrix} A & E \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix} E & A^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ BA^{-1} \end{bmatrix}.$$

注意: 上式标红的地方顺序不能颠倒, 原因正是矩阵 1 提到的"左乘行变换, 右乘列变换".

矩阵 5

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 伴随矩阵

5.1 基本知识

伴随矩阵是一个类似于逆矩阵的概念. 如果矩阵可逆, 那么它的逆矩阵和它的伴随矩阵之间只差一个系数.

$$\mathrm{A}^* = |\mathrm{A}|\mathrm{A}^{-1}. \tag{1}$$

然而, 伴随矩阵不依赖逆矩阵的存在而存在, 伴随矩阵的另一个定义基于代数余子式的定义, 伴随矩阵就是把原来矩阵每一行的代数余子式竖着写:

$$\mathrm{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

特殊的, 对于二阶方阵 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 其伴随矩阵是

$$\mathrm{A}^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

5.2 伴随矩阵的秩

对于 $n(n>2)$ 级方阵 A,

$$r\left(\mathrm{A}^*\right) = \begin{cases} n & r\left(\mathrm{A}\right) = n \\ 1 & r\left(\mathrm{A}\right) = n-1 \\ 0 & r\left(\mathrm{A}\right) < n-1 \end{cases}. \tag{2}$$

证明:

(1) 当 $r(\mathrm{A}) = n$ 时, 由式 (1), $r\left(\mathrm{A}^*\right) = n$.

(2) 当 $r(\mathrm{A}) = n-1$ 时, 矩阵 A 至少有一个 $n-1$ 级子式非零, 即 $r\left(\mathrm{A}^*\right) \geqslant 1$. 另外, 由 $|\mathrm{A}| = 0$

$$\mathrm{AA}^* = |\mathrm{A}|\,\mathrm{E} = 0.$$

伴随矩阵 A^* 的每一列都是线性方程组 $\mathrm{A}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$ 的解, $r(\boldsymbol{X}) = n - r(\mathrm{A}) = n-(n-1) = 1$, 所以, $r\left(\mathrm{A}^*\right) \leqslant 1$.

综上, $r\left(\mathrm{A}^*\right) = 1$.

(3) 当 $r(\mathrm{A}) < n-1$ 时, A 的所有 $n-1$ 级子式都为零, 从而 $\mathrm{A}^* = 0$, 即 $r\left(\mathrm{A}^*\right) = 0$.

5.3 伴随矩阵的其他性质

(1) $\mathrm{E}^*=\mathrm{E}$.

(2) $(\mathrm{AB})^*=\mathrm{B}^*\mathrm{A}^*$.

(3) $\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)^*=(\mathrm{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\mathrm{A}^*|=|\mathrm{A}|^{n-1}$.

证明: 对 $\mathrm{A}^*\mathrm{A}=\mathrm{A}\mathrm{A}^*=|\mathrm{A}|\,\mathrm{E}$ 左右同取行列式.

$$|\mathrm{A}^*|\,|\mathrm{A}|=|\mathrm{A}|^n.$$

当 A 可逆时, 上式成立. 当 A 不可逆时, 由式 (2), 结论依旧成立.

(5) $(k\mathrm{A})^*=k^{n-1}(\mathrm{A})^*$.

证明: $(k\mathrm{A})^*=|k\mathrm{A}|\,(k\mathrm{A})^{-1}=k^{n-1}\,|\mathrm{A}|\,\mathrm{A}^{-1}=k^{n-1}\,(\mathrm{A})^*$.

(6) 如果 A 可逆

$$\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^*=(\mathrm{A}^*)^{-1}=\frac{\mathrm{A}}{|\mathrm{A}|}.$$

(7) $(\mathrm{A}^*)^*=|\mathrm{A}|^{n-2}\,\mathrm{A}\,(n>2)$.

证明:

$$(\mathrm{A}^*)^*=\left(|\mathrm{A}|\,\mathrm{A}^{-1}\right)^*=|\mathrm{A}|^{n-1}\left(\mathrm{A}^{-1}\right)^*=|\mathrm{A}|^{n-2}\,\mathrm{A}.$$

(8) 若 A 是正交矩阵, 则

$$\mathrm{A}^*=\pm\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

证明: 若 A 是正交矩阵, 则 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}^{-1}$, 且 $|\mathrm{A}|=\pm 1$, 由式 (1)

$$\mathrm{A}^*=\pm\mathrm{A}^{-1}.$$

所以, 结论 $\mathrm{A}^*=\pm\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ 成立.

5.4 伴随矩阵 A^* 可以写为矩阵 A 的多项式.

证明见扬哥的暑期强化讲义.

矩阵 6

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

矩阵运算技巧 –> 打洞原理

打洞原理是初等变换的进阶, 利用打洞原理可以解决很多问题.

6.1 基本知识

设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是一个方阵, $A_{m\times m}, D_{n\times n}$ 是子方阵. 若子方阵 A 可逆, 则

$$|M| = |A| \cdot \left|D - CA^{-1}B\right|.$$

证: 利用分块矩阵和"左行右列"知识

$$\begin{bmatrix} E_n & \mathbf{0} \\ -CA^{-1} & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \tag{1}$$

左右同时取行列式即可. 实际上"打洞原理"是一种降阶技巧.

如果方阵 D 可逆, 类似的有

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & \mathbf{0} \\ -D^{-1}C & E_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}.$$

左右同时取行列式, 有

$$|M| = |D| \cdot \left|A - BD^{-1}C\right|.$$

综上, 方阵 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 可逆, 当且仅当 $D - CA^{-1}B$ 可逆 (A 可逆), 当且仅当 $A - BD^{-1}C$ 可逆 (D 可逆).

特殊地, 若矩阵 M 是对称阵, 则有合同变换

$$\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - B^{\mathrm{T}}A^{-1}B \end{bmatrix}. (\text{Schmidt 正交化})$$

另外, 对于式 (1), 如果矩阵 A 和矩阵 C 可交换, 即 $AC = CA$, 那么

$$|M| = |A| \cdot \left|D - CA^{-1}B\right| = \left|AD - ACA^{-1}B\right| = \left|AD - CAA^{-1}B\right| = |AD - CB|.$$

6.2 例题

例题 1 对于 n 阶方阵 A, B, 试证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

证:
$$\begin{bmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & -E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix}.$$

左右同时取行列式即可.

例题 2 证明 *Vandermond* 行列式

$$\begin{vmatrix} l1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(a_j-a_i).$$

证:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a_1 & 1 & & & \\ & -a_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_{n-1}-a_1) \end{bmatrix}.$$

再应用数学归纳法, 即可得到证明.

许以超先生说“打洞”是“矩阵计算中最基本的技巧”. 利用“打洞”可以解决很多问题, 在以后的诸多问题中都有体现, 请慢慢体会.

矩阵 7

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

等价 (相抵) 标准型 I

7.1 预备知识

定理: A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow$ 存在可逆方针 P,Q 使 $B=PAQ$.

A 与 B 相抵, 则 A 可以通过一系列初等行变换和初等列变换变成 B. 反之, 亦然.

细节自行翻阅课本 (养成经常翻课本的好习惯).

注: 等价是一个相当宽泛的概念, 比如相似也是等价概念, 为进一步区分此处的 "等价", 所以这里我们采用中科大等课本上的命名——相抵.

推论 1: 若 $\mathrm{rank}A=r$, 则存在可逆方针 P,Q 使 $A=PSQ$, 其中,

$$S=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

推论 1 是今后经常用到的一种方法——相抵标准型法.

推论 2: A 与 B 相抵 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$.

证:

必要性: 由 A 与 B 等价, 存在可逆方针 P,Q 使 $B=PAQ$. 又因为 P,Q 可逆, 所以 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$.

充分性: 不妨设 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B=r$, 则

$$A=P_1SQ_1, B=P_2SQ_2.$$

其中, P_1,P_2,Q_1,Q_2 可逆, $S=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$. 由相抵 (等价) 的传递性, 可得 A 与 B 相抵.

注: 秩是矩阵相抵中的不变量, 只要两个矩阵的秩相等, 那么这两个矩阵就相抵.

关于矩阵的秩:

$$\text{矩阵的秩} = \text{行向量组的秩} = \text{列向量组的秩} = \text{不为零子式的最高阶数}$$

7.2 例题

例题 1 若 $rankA=1$, 则 A 可以写成某个非零向量 β 和非零向量 α 的乘积: $A=\beta\alpha^T$.

证: 存在可逆方阵 P,Q 使

$$A=P\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q=\beta\alpha^{\mathrm{T}}.$$

其中, $\beta=P\begin{bmatrix}1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ 是 P 的第一列, $\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q$ 是 Q 的第一行.

例题 2 广义逆矩阵

设矩阵 $A_{m\times n}=P\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}Q$, 其中 P,Q 都是可逆方阵, 则 $B_{n\times m}=Q^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}P^{-1}$ 称为矩阵 A 的广义逆矩阵.

证明: 矩阵 B 是 A 的一个广义逆矩阵的充分必要条件是 $ABA=A$ 并且 $BAB=B$.

证: 由定义可得必要性. 下证充分性. 设

$$A=P\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}Q,\quad B=Q^{-1}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}P^{-1}.$$

由 $ABA=A,BAB=B$ 可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}.$$

从而有 $B_1=\boldsymbol{E}_r,B_4=B_3B_2$. 设 $\widetilde{P}=P\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & -B_2\\ O & \boldsymbol{E}_{m-r}\end{bmatrix},\tilde{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ -B_3 & \boldsymbol{E}_{n-r}\end{bmatrix}Q$, 则有

$$A=\widetilde{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\widetilde{Q},\quad B=\widetilde{Q}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\widetilde{P}^{-1}$$

所以 B 是 A 的一个广义逆矩阵.

寄语: 利用等价标准型可以解决很多问题, 知识点并不难, 但是, 题目变形很多, 需要多做题目, 多总结, 多体会.

矩阵 8

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

等价 (相抵) 标准型 II

8.1 相抵标准型的应用

例题 1 线性方程组 $AX=b$ 有解的判定及其解结构, 其中 $A\in F^{m\times n}$

解: 设 $rankA=r$, 则存在可逆 m 阶方阵 P 和 n 阶方阵 Q, 成立

$$A=P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

方程组 $AX=b$ 化为

$$P\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QX=b.$$

两边同乘 P^{-1}, 并令 $Y=QX$, 得

$$\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Y=P^{-1}b. \tag{1}$$

将 n 维列向量 Y 分块为 $\begin{bmatrix}Y_r\\ Y_{n-r}\end{bmatrix}$, 将 m 维列向量 $P^{-1}b$ 分块为 $\begin{bmatrix}Z_r\\ Z_{m-r}\end{bmatrix}$, 则 (1) 化简为

$$\begin{bmatrix}Y_r\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_r\\ Z_{m-r}\end{bmatrix}. \tag{2}$$

若 $Z_{m-r}\neq 0$, 则方程组 (2) 无解, 原方程组 $AX=b$ 也无解.

设 $Z_{m-r}=0$. 方程组 (1) 解 $Y=\begin{bmatrix}Y_r\\ Y_{n-r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_r\\ Y_{n-r}\end{bmatrix}$, 其中 $Y_{n-r}\in F^{(n-r)\times 1}$ 为任意值. 原方程的解为

$$X=Q^{-1}\begin{bmatrix}Z_r\\ Y_{n-r}\end{bmatrix}=Q^{-1}\begin{bmatrix}Z_r\\ 0\end{bmatrix}+y_{r+1}\gamma_{r+1}+\cdots+y_n\gamma_n.$$

其中, $\gamma_{r+1}\cdots\gamma_n$ 是 Q^{-1} 的后 $n-r$ 列. $y_{r+1}\cdots y_n$ 是自由变量.

考察增广矩阵

$$\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}E_r & O & Z_r\\ O & O & Z_{m-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以

$$rank\left(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix}\right)=r\Longleftrightarrow Z_{m-r}=0\Longleftrightarrow rank\,(A)$$

例题 2 证明: $rank(AB)=rank(A)$ 的充分必要条件是存在矩阵 X 使得 $ABX=A$.

证: 先证充分性:

设 $ABX=A$.

$$rank(ABX)\le rank(AB)\le rank(A)=rank(ABX).$$

故 $rank(AB)=rank(A)$.

然后是必要性:

设 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$, 其中 P,Q 都是可逆方阵. 由 $rank(AB)=r$ 可得 $AB=P\begin{pmatrix}C\\ O\end{pmatrix}$, 其中 C 是行满秩矩阵. 设矩阵 Y 是 C 的一个右逆, 则 $X=\begin{pmatrix}Y & O\end{pmatrix}Q$ 满足 $ABX=A$.

例题 3 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^2=A$. 求证: 存在 n 阶可逆方阵 P 使

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \text{其中} r=rank\,A.$$

证: 存在 n 阶可逆方阵 P_1,Q_1 使

$$A=P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}Q_1. \tag{3}$$

带入 $A^2=A$, 得

$$P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}Q_1P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}Q_1=P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}Q_1.$$

对上式两边都是左乘 P_1^{-1}, 右乘 Q_1^{-1}, 并令 $T=Q_1P_1=\begin{bmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix}$, 其中 T_1 是 r 阶方阵, 得

$$\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \text{即}\begin{bmatrix}T_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

因此

$$Q_1P_1=\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix}, Q_1=\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix}P_1^{-1}.$$

带入 (3), 得

$$A=P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ T_3 & T_4\end{bmatrix}P_1^{-1}=P_1\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}P_1^{-1}.$$

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

又因为

$$\begin{bmatrix}E & -T_2\\ 0 & E\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}E_{(r)} & T_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -T_2\\ 0 & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

令 $P=P_1\begin{bmatrix}E & -T_2\\ \mathbf{0} & E\end{bmatrix}$, 则

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}E_{(r)} & \boldsymbol{O}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

看会不是会, 动手写一遍吧!

矩阵 9

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

等价 (相抵) 标准型 III

9.1 相抵标准型的应用

例题 1 求所有 $A\in F^{n\times n}$, 满足 $A^2=A$.

解: 设 $A=P_1\begin{pmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}Q_1$, 其中 $r=rank(A)$, $P_1,Q_1\in F_{n\times n}$ 都是可逆矩阵.

$$A^2=P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1=P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1 \quad\Rightarrow\quad Q_1P_1=\begin{bmatrix}E_r & R_2\\ R_3 & R_4\end{bmatrix}.$$

从而

$$\begin{aligned}A &= P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1P_1P_1^{-1}=P_1\begin{bmatrix}E_r & R_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}P_1^{-1}.\\ &= P_1\begin{bmatrix}E & -R_2\\ \mathbf{0} & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & R_2\\ \mathbf{0} & E\end{bmatrix}P_1^{-1}=P\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}P^{-1}.\end{aligned}$$

对于任意可逆方阵 P, $A=P\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}^{-1}P^{-1}$, 满足 $A^2=A$.

对比等价 (相抵) 标准型 II 例题 3 类似题目.

例题 2 求所有 $A\in F^{n\times n}$, 满足 $A^2=\mathbf{0}$.

解: 设 $A=P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1$, 其中 $r=rank(A)$, $P_1,Q_1\in F_{n\times n}$ 都是可逆矩阵.

$$A^2=P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1P_1\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}Q_1=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad Q_1P_1=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{r\times r} & R_2\\ R_3 & R_4\end{bmatrix}.$$

由 $rank(R_2)=rank\left(\begin{bmatrix}\mathbf{0} & R_2\end{bmatrix}\right)=r$, 可设 $R_2=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & E_2\end{bmatrix}\tilde{Q}$, 其中, $\tilde{Q}$ 是 $n-r$ 维的可逆方阵. 从而, $r\leqslant n-r$,

$$\begin{aligned}A &= P\begin{bmatrix}E_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}QPP^{-1}=P\begin{bmatrix}\mathbf{0} & R_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}P^{-1}\\ &= P\begin{bmatrix}E & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{Q}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & E_r\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \tilde{Q}\end{bmatrix}P^{-1}=\tilde{P}\begin{bmatrix}\mathbf{0} & E_r\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\tilde{P}^{-1}.\end{aligned}$$

因此, 对于任意的可逆方阵 P 和非负整数 $r\leqslant \frac{n}{2}$, $A=P\begin{bmatrix}\mathbf{0} & E_r\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}P^{-1}$ 满足 $A^2=\mathbf{0}$.

矩阵 10

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

等价 (相抵) 标准型 IV

10 证明秩不等式

例题 1

(1) 求证:

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\right) = rankA + rankB.$$

(2) 求证:

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ C & B \end{bmatrix}\right) \geqslant rankA + rankB.$$

证明: 设 $r = rankA, s = rankB$. 则存在可逆方阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使得

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} E_{(r)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad P_2BQ_2 = \begin{bmatrix} E_{(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

取可逆方阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q_2 \end{bmatrix}.$$

(1)

$$S_1 = P\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix} P_1AQ_1 & \\ & P_2BQ_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ & & E_s & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

因此,

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\right) = rank\ S_1 = r + s = rank\ A + rank\ B.$$

(2)

$$S_2 = P\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}Q = \begin{bmatrix} E_r & & & & & \\ & \mathbf{0} & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & \\ & & & E_s & & \\ & P_2CQ_1 & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

因此,

$$rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ C & B \end{bmatrix}\right) = rank\ S_2 \geqslant r + s = rank\ A + rank\ B.$$

例题 2 设 $A, B \in F^{m\times n}$, 求证: $\mathrm{rank}(A+B) \leqslant \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B$.

证明:

$$\begin{aligned} rankA+rankB &= rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\right) \\ &= rank\left(\begin{bmatrix} E_m & \\ E & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & \\ E & E_n \end{bmatrix}\right) \\ &= rank\left(\begin{bmatrix} A & \\ A+B & B \end{bmatrix}\right) \geqslant rank\,(A+B). \end{aligned}$$

例题 3 *Frobenius* 秩不等式.

$$\mathrm{rank}(AB)+\mathrm{rank}(BC)\leqslant \mathrm{rank}(ABC)+\mathrm{rank}(B).$$

证明: 因为

$$\begin{bmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -C \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

所以,

$$rank\,(ABC)+rank\,(B)=rank\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}\geqslant rank\,(AB)+rank\,(BC).$$

当矩阵 $B=E$ 时, 就有 Sylvester 秩不等式

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(C)\leqslant \mathrm{rank}(AC)+n.$$

矩阵 11

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

矩阵是高等代数中核心的研究对象, 非常重要. 矩阵涉及的内容非常之多, 矩阵相关的题目也是数不胜数, 作为基础篇, 我们还是以课本为基础, 汇总重要的思想方法, 有的题目可能稍简单, 但是思想却很重要.

特征值与特征向量

11.1 基础知识

$$A\boldsymbol{x}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{x}_0.$$

- λ_0 是方阵 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是方阵 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$ 的一个根;
- $\boldsymbol{x}_0$ 是方阵 A 的属于 λ_0 的一个特征向量 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_0$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的一个非零解;
- 特征值之和等于方阵 A 的迹
$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$
- 特征值之积等于方阵 A 的行列式
$$|A| = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$
- 可逆矩阵的特征值不等于 0 .

对于特征多项式

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- λ^n 的系数是 1;
- λ^{n-1} 的系数是 $-\operatorname{tr}(A)$;
- 常数项的系数是 $(-1)^n|A|$.

11.2 例题

例题 1 设 A, B 分别是 $n \times m, m \times n$ 的矩阵 $(m > n)$. 证明:

(1) AB 与 BA 有相同的非零特征值, 并且重数相同;

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 AB 的属于非零特征值 λ_0 的一个特征向量, 那么 $B\boldsymbol{\alpha}_0$ 是 BA 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

证: (1) 根据打洞原理, E_m 可逆

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = |E_m| \cdot \left|\lambda E_n - A E_m^{-1} B\right| = |\lambda E_n - AB|.$$

当 $\lambda\neq 0$ 时, λE_n 同样可逆

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = |\lambda E_n|\cdot\left|E_m - B\frac{1}{\lambda}E_nA\right| = \lambda^{n-m}\cdot|\lambda E_m - BA|.$$

综上

$$|\lambda E_n - AB| = \begin{vmatrix} E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \lambda^{n-m}|\lambda E_m - BA|. \tag{1}$$

因此, AB 和 BA 的特征多项式只差一个因子 λ^{n-m}, 进一步地, 他们有相同的非零特征值, 并且重数相同. 式 (1) 通常被称为矩阵的降阶公式.

(2) 由题意得

$$AB\alpha_0 = \lambda_0\alpha_0.$$

对上式左右同乘 B

$$BA(B\alpha_0) = B\lambda_0\alpha_0 = \lambda_0(B\alpha_0).$$

得证.

例题 2 设 A 是 n 阶非奇异阵, α 和 β 是 n 维非零列向量. 证明 $\left|\lambda A - \alpha\beta^T\right| = 0$ 有一个根是 $\beta^TA^{-1}\alpha$, 其他根都是 0:

证: 根据降阶公式 (1) 有

$$\left|\lambda A - \alpha\beta^{\mathrm{T}}\right| = |A||\lambda E_n - \left(A^{-1}\alpha\right)\beta^{\mathrm{T}}| = |A|\cdot\lambda^{n-1}\left(\lambda - \beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha\right) = 0.$$

由于 A 非奇异, 所以 A 可逆且 $|A|\neq 0$. 所以 $\left|\lambda A - \alpha\beta^{\mathrm{T}}\right| = 0$ 有 $n-1$ 个零根, 另一根是 $\beta^{\mathrm{T}}A^{-1}\alpha$. 特殊地, 当 $A = E$ 时,

$$\left|\lambda E - \alpha\beta^{\mathrm{T}}\right| = \lambda^{n-1}\left(\lambda - \beta^{\mathrm{T}}\alpha\right) = 0.$$

所以, 秩 1 矩阵$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$ 有 $n-1$ 个特征值是 0, 另一个特征值是 $\beta^{\mathrm{T}}\alpha = \mathrm{tr}(\alpha\beta^{\mathrm{T}})$.

例题 3 求 n 阶实对称矩阵 A 的特征值及其行列式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

解: A 的特征多项式

$$|\lambda E_n - A| = \left[(\lambda+1)E_n - \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}\right] = 0.$$

记 $\mu=\lambda+1,\ \alpha=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$, 则上式右端化为

$$\left|\mu E_n-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\right|=0.$$

由例 2 知道, 矩阵 $\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 有 $n-1$ 个特征值 $\mu=\lambda+1=0$, 即 $\lambda=-1$, 有一个特征值 $\mu=\lambda+1=n$, 即 $\lambda=n-1$. 而多项式

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=(-1)^{n-1}(n-1).$$